

考虑混凝土孔隙压实效应的球形空腔膨胀理论

李志康^{1,2}, 黄风雷¹

(1. 北京理工大学 爆炸科学与技术国家重点实验室, 北京 100081; 2. 西北核技术研究所, 西安 710024)

摘要: 根据混凝土材料动态响应的特点, 将常规弹速范围内混凝土球形空腔的动态响应区域划分为弹性区、开裂区和孔隙压实区, 孔隙压实区的混凝土材料采用两段式线性状态方程和考虑拉伸破坏的 Mohr-Coulomb 屈服准则描述。运用相似变换方法推导了球形空腔动态膨胀响应的理论表达式, 采用 Runge-Kutta-Fehlberg 数值方法给出了球形空腔动态响应的数值解。结果表明, 运用该理论建立的侵彻模型与试验结果具有良好的一致性。

关键词: 球形空腔膨胀理论; 混凝土; 孔隙压实效应; 侵彻

中图分类号: O 385

文献标识码: A

A spherical cavity expansion theory of concrete considering voids compacted effects

LI Zhi-kang^{1,2}, HUANG Feng-lei¹

(1. State Key Laboratory of Explosion Science and Technology, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China;

2. Northwest Institute of Nuclear Technology, Xi'an 710024, China)

Abstract: Based on the dynamic response characteristic of concrete, the dynamic response of spherical cavity expansion for conventional projectile velocity is divided into three regions, i.e. elastic, cracked and voids compacted regions. The constitutive description of voids compacted region idealized pressure-volumetric strain as bilinear compressible and idealized shear strength pressure as Mohr-Coulomb criterion with a tension cutoff. The dynamic response expression of spherical cavity expansion is derived by similarity methods; and the dynamic response numerical solution is given by Runge-Kutta-Fehlberg numerical method. The results show that the predictions from the penetration model based on the theory are consistent with experiment data.

Key words: spherical cavity expansion theory; concrete; voids compacted effects; penetration

1 引言

侵彻问题的研究方法可以归纳为经验法、解析法和数值模拟方法, 其中解析法是侵彻问题研究的重要环节。合理确定弹体侵彻过程中的阻力是解析法的关键所在^[1], 空腔膨胀理论为合理确定弹体侵彻阻力提供了一种有效的途径。空腔膨胀理论的研究始于 19 世纪 40 年代^[2], 从 60 年代开始应用于解决侵彻问题^[3], 此后研究人员开始采用空腔膨胀理论解决延性材料^[4-5]、(准)脆性材料^[6-9]、钢筋混凝土^[10]等的侵彻问题。

混凝土材料的单轴抗拉强度约为单轴抗压强度的 1/10 左右, 是典型的准脆性材料, 剪切强度具有

压力依赖性。另外, 混凝土材料具有较高的孔隙率, 其水泥浆的孔隙率可达 30%^[11], 在动态压缩作用下具有多孔材料的动态压缩特性^[12]。文献[7]采用线性压力-体积应变关系和考虑拉伸破坏的 Mohr-Coulomb 屈服准则描述混凝土材料, 建立了混凝土材料的动态球形空腔膨胀侵彻模型, 该模型可以较好地预测弹体侵彻混凝土半无限靶的深度, 但其线性压力-体积应变关系是准静态力学性能试验结果的近似。弹体侵彻混凝土靶是一动载过程, 因此, 混凝土材料的压力-体积-应变关系应能反映其动载特性。基于上述不足, 本文将采用混凝土材料 HJC 状态方程^[12]的弹性段和过渡段与考虑拉伸破坏的 Mohr-Coulomb 屈服准则描述混凝土材料, 给出考

考虑混凝土材料孔隙压实效应的球形空腔膨胀理论。

2 混凝土材料的本构关系

混凝土材料的 HJC 状态方程将其在动态压缩条件下的响应划分为弹性区、过渡区（由于过渡区的混凝土材料中的孔隙将被压实，因此将其命名为孔隙压实区）和完全密实区^[12]，如图 1 所示。

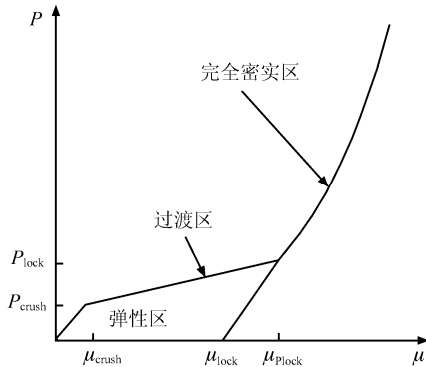


图 1 混凝土材料的 HJC 状态方程

Fig.1 HJC Equation of state of concrete materials

在常规弹速范围内，弹体侵彻半无限混凝土靶的动态空腔膨胀压力在 1 GPa 的量级^[7]，而混凝土材料的初始密实压力也约在 1 GPa 左右^[12]，因此可以采用图 1 中的弹性段和过渡段（孔隙压实段）近似描述常规弹速范围内混凝土材料的压力-体积应变关系，具体表达式为

$$\left. \begin{aligned} P &= K\mu, \quad (P \leq P_{\text{crush}}) \\ P &= P_{\text{crush}} + K_c \mu_c, \quad (P_{\text{crush}} < P \leq P_{\text{lock}}) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中：\$P\$ 为压力；\$\mu\$ 为体积应变；\$K\$ 为体积模量；\$P_{\text{crush}} = f'_c/3\$ 为孔隙初始压实压力，\$f'_c\$ 为单轴抗压强度；\$K_c = (P_{\text{lock}} - P_{\text{crush}})/(\mu_{\text{plock}} - \mu_{\text{crush}})\$；\$\mu_c = \mu - \mu_{\text{crush}}\$；\$P_{\text{lock}}\$ 为孔隙初始密实压力；\$\mu_{\text{plock}}\$ 为 \$P_{\text{lock}}\$ 对应的混凝土体积变形。

采用最大拉应力破坏准则描述混凝土材料的拉伸破坏，采用 Mohr-Coulomb 准则描述孔隙压实区混凝土材料的屈服，即

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\theta &= 0, \sigma_\theta \geq f, \quad (P < P_{\text{crush}}) \\ \sigma_r - \sigma_\theta &= \lambda P + \tau_0, \quad (P > P_{\text{crush}}) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式中：\$\sigma_r\$、\$\sigma_\theta\$ 分别为径向应力和环向应力，取压为正；\$P = (\sigma_r + 2\sigma_\theta)/3\$ 为静水压力；\$\lambda\$ 为定义 Mohr-Coulomb 屈服准则的材料参数；\$\tau_0 = [(3-\lambda)/3]f'_c\$ 为混凝土材料的黏聚强度；\$f\$ 为混凝土材料的单轴抗拉强度。

3 基本方程

假设混凝土材料球形空腔的初始半径 \$r=0\$，且以瞬时速度 \$V\$ 向外膨胀。在球形空腔向外膨胀的过程中，首先其周围混凝土材料的孔隙被压实，产生孔隙压实区。与此同时，产生弹性球面压缩波，并以弹性体积波速向外传播；在弹性球面压缩波向外传播的同时，产生环向拉应力。鉴于混凝土材料的抗拉强度低，如果环向拉应力超过混凝土材料的抗拉强度，那么将在空腔周围的混凝土材料中形成开裂区。综上所述，混凝土球形空腔在膨胀过程中将产生弹性区、开裂区和孔隙压实区 3 个响应区域。当空腔膨胀速度增大到一定程度时，开裂区将消失^[7]，此时空腔膨胀的响应只包含弹性区和孔隙压实区 2 个区域。

图 2 为球形空腔膨胀的响应区域及其界面坐标示意图。Euler 坐标系下，球形空腔动态膨胀的质量、动量守恒方程分别为

$$\left. \begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial v}{\partial r} + 2 \frac{v}{r} \right) &= - \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial r} \right) \\ \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{2}{r} (\sigma_r - \sigma_\theta) &= - \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} \right) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

式中：\$\rho\$ 为密度；\$r\$ 为极坐标；\$t\$ 为时间；\$v\$ 为质点速度。

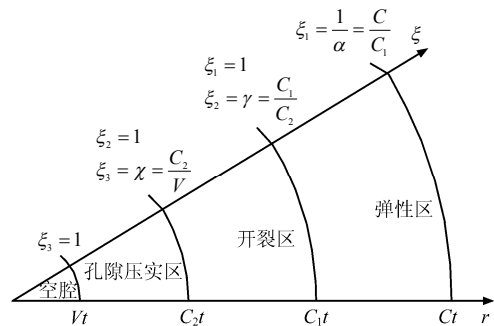


图 2 球形空腔膨胀的响应区域

Fig.2 Response region of spherical cavity expansion

弹体侵彻过程主要是由稳态侵彻控制，而稳态侵彻具有自相似性，因此，与稳态侵彻相关的球形空腔动态膨胀也具有自相似性^[8]。由于采用相似变换方法，可以将式 (3) 化为常微分方程组，可以降低求解偏微分方程组的难度，本文采用相似变换法求解球形空腔膨胀的动态响应。

另外，在球形空腔动态膨胀的过程中，必然要涉及到波的传播，因此在各个响应区域的交界面上需要满足 Hugoniot 间断条件。质量和动量守恒形式

的 Hugoniot 间断条件为

$$\left. \begin{aligned} \rho_-(v_- - c) &= \rho_+(v_+ - c) \\ \sigma_- + \rho_- v_-(v_- - c) &= \sigma_+ + \rho_+ v_+(v_+ - c) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

式中: ρ_+ 、 ρ_- 分别为波前、波后介质的密度; v_+ 、 v_- 分别为波前、波后介质的质点速度; c 为波阵面速度; σ_+ 、 σ_- 分别为波前、波后介质中的正应力。

4 球形空腔膨胀分析

4.1 孔隙压实区

运用式(2)中的第2式 Mohr-Coulomb 屈服准则和压力体积应变关系式(1)第2式, 消去式(3)中的 σ_θ 、 ρ , 并引入相似变换

$$\xi_3 = r/Vt, S_3 = \sigma_r/f'_c, U_3 = v/V, T = \tau_0/f'_c \quad (5)$$

则式(3)可以变换为

$$\left. \begin{aligned} \frac{dU_3}{d\xi_3} + \frac{2U_3}{\xi_3} &= \frac{\kappa f'_c (\xi_3 - U_3)}{2K_c (1-\mu)} \frac{dS_3}{d\xi_3} \\ \frac{dS_3}{d\xi_3} + \kappa \lambda \frac{S_3}{\xi_3} + \kappa \frac{T}{\xi_3} &= \delta^2 \left(\frac{\xi_3 - U_3}{1-\mu} \right) \frac{dU_3}{d\xi_3} \\ \mu &= \frac{\kappa f'_c}{2K_c} \left(S_3 - \frac{2T}{3} \right) - \bar{P}_c + \mu_{\text{crush}} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

式中: $\kappa = 6/(3+2\lambda)$; $\delta = V/c_Y$, $c_Y^2 = f'_c/\rho_0$; $\bar{P}_c = P_{\text{crush}}/K_c$ 。

常微分方程组式(6)不存在解析解, 为了便于采用 Runge-Kutta-Fehlberg 数值方法进行求解, 将其化为如下标准形式:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dU_3}{d\xi_3} &= \frac{\frac{2U_3}{\xi_3} + \frac{f'_c \kappa^2}{2K_c \xi_3} \left(\frac{\xi_3 - U_3}{1-\mu} \right) (\lambda S_3 + T)}{\frac{\kappa \delta^2 f'_c}{2K_c} \left(\frac{\xi_3 - U_3}{1-\mu} \right)^2 - 1} \\ \frac{dS_3}{d\xi_3} &= \frac{\kappa \lambda \frac{S_3}{\xi_3} + \kappa \frac{T}{\xi_3} + \frac{2\delta^2 U_3}{\xi_3} \left(\frac{\xi_3 - U_3}{1-\mu} \right)}{\frac{\kappa \delta^2 f'_c}{2K_c} \left(\frac{\xi_3 - U_3}{1-\mu} \right)^2 - 1} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

式中: μ_c 由式(6)的第3式给出。

根据式(2)中的第2式 Mohr-Coulomb 屈服准则可知, 孔隙压实区外侧边界上的无量纲径向应力为

$$S_{2-} = S_3(\xi_3 = \chi) = 1 \quad (8)$$

另外, 在空腔表面上常微分方程组(7)还满足边界条件:

$$U_3(\xi_3 = 1) = 1 \quad (9)$$

4.2 开裂区

根据弹性区和开裂区的解析解^[8], 可得开裂区内侧边界上的无量纲径向应力和质点速度:

$$\left. \begin{aligned} S_{2+} &= S_2(\xi_2 = 1) = 1 \\ U_{2+} &= U_2(\xi_2 = 1) = d + \frac{2f'_c}{E(1-\beta^2)} \\ d &= \frac{f'_c(1+\beta^2\gamma^2)}{\gamma E(\beta^2-1)} + \gamma \bar{u}_{1+} \\ \gamma^2 &= \frac{f'_c \left[1 - \left(\frac{C_1}{C_{cr}} \right)^2 \right] \left[1 - \frac{\rho_0}{3K} \left(\frac{C_1 - v_{1+}}{1-\mu_{1+}} \right)^2 \right]}{\sigma_{1+} - \rho_0 \mu_{1+} \left(\frac{C_1 - v_{1+}}{1-\mu_{1+}} \right)^2} + \left(\frac{C_1}{C_{cr}} \right)^2 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

式中: E 为弹性模量; $\gamma = C_1/C_2$; $\beta = C_2/C_{cr}$, $C_{cr} = \sqrt{E/\rho_0}$; $S_2 = \sigma_r/f'_c$; $U_2 = v/C_2$; $\bar{u}_{1+} = \bar{u}_1(\xi_1 = 1)$, $\bar{u}_1 = u/C_1 t$, u 为位移; $v_{1+} = v(\xi_1 = 1)$; $\mu_{1+} = \mu(\xi_1 = 1)$; $\sigma_{1+} = \sigma_r(\xi_1 = 1)$ 。

4.3 弹性区

当 $C_2 < C_1$ 时, 开裂区没有消失, 根据弹性区响应的解析解^[8], 可得弹性区内侧边界上的质点速度、径向应力和无量纲径向位移:

$$\left. \begin{aligned} v_{1+} &= \frac{3C_1 f(1+\alpha)(1+\nu)(1-2\nu)}{E[(1-2\nu)(1+\alpha) - 2\alpha^2(1+\nu)]} \\ \sigma_{1+} &= \frac{2f[(1-2\nu)(1+\alpha) + \alpha^2(1+\nu)]}{(1-2\nu)(1+\alpha) - 2\alpha^2(1+\nu)} \\ \mu_{1+} &= \frac{2f\alpha^2(1+\nu)}{K[(1-2\nu)(1+\alpha) - 2\alpha^2(1+\nu)]} \\ \bar{u}_{1+} &= \frac{f(1-\alpha)(1+2\alpha)(1-\nu)(1-2\nu)}{E[(1-2\nu)(1+\alpha) - 2\alpha^2(1+\nu)]} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

式中: $\alpha = C_1/C$, C 为体积膨胀波速; ν 为泊松比。

当 $C_2 \geq C_1$ 时, 开裂区消失, 根据弹性区响应的解析解^[8], 可得弹性区内侧边界上的无量纲径向应力和质点速度:

$$\left. \begin{aligned} S_{2+} &= S_1(\xi_1 = 1) = 1 \\ U_{2+} &= \frac{f'_c(1-\alpha)(1+2\alpha)(1+\nu)(1-2\nu)}{2E[(1+\alpha)(1-2\nu) + \alpha^2(1+\nu)]} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

式中: $U_{2+} = U_1(\xi_1 = 1)$ $S_1 = \sigma_r/f'_c$; $U_1 = v/C_2$; $\alpha = C_2/C$ 。

4.4 孔隙压实区外侧界面条件

从前文分析可以看出, 孔隙压实区外侧界面上的径向应力是连续的, 从而根据 Hugoniot 间断条件

式(4)可知,其质点速度也是连续的,因此,在孔隙压实区外侧界面上,

$$S_{2-} = S_{2+} = 1; U_{2-} = \chi U_{2+} \quad (13)$$

5 数值结果与讨论

文献[13]提供了一组钢制卵形弹体侵彻混凝土靶的实验数据,但只给出了混凝土材料的型号和单轴抗压强度。根据同种型号混凝土的性质^[7, 14-15]并参考混凝土 HJC 状态方程参数的确定方法^[12],确定了表 1 的材料参数。

表 1 混凝土材料参数

Table 1 Parameters of concrete material

ρ_0 (kg/m ³)	f'_c /MPa	f /MPa	μ_{crush}	P_{lock} /MPa	μ_{block}	ν	λ
2 260	51	5	0.001 3	800	0.11	0.22	0.67

根据本文推导的球形空腔理论公式,运用 Runge-Kutta-Fehlberg 数值方法进行了空腔膨胀过程中径向应力和质点速度分布的数值计算,计算结果如图 3、4 所示。

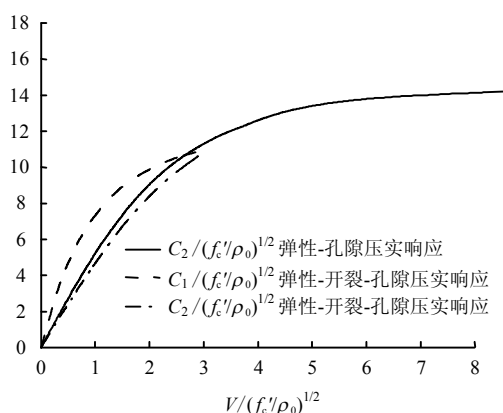


图 3 界面速度与空腔膨胀速度之间的关系

Fig.3 Interface velocity vs. cavity expansion velocity

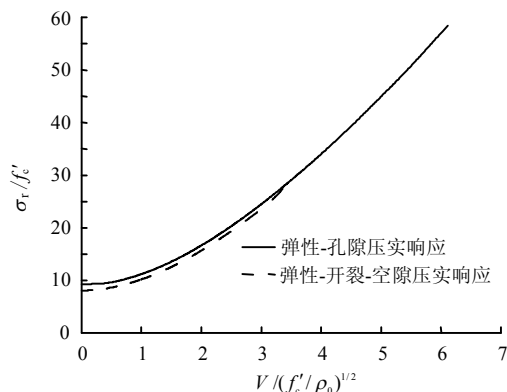


图 4 空腔表面径向应力与其膨胀速度之间的关系

Fig.4 Radial stresses at the cavity surface vs. cavity expansion velocity

为了对比分析,对文献[7]提出的球形空腔模型也进行了数值计算,图 5 为两种模型空腔膨胀速度与空腔表面径向应力关系的计算结果,图中弹性-开裂-孔隙压实空腔膨胀模型采用两段式压力-体积应变关系,弹性-开裂-塑性采用线性压力-体积应变关系。

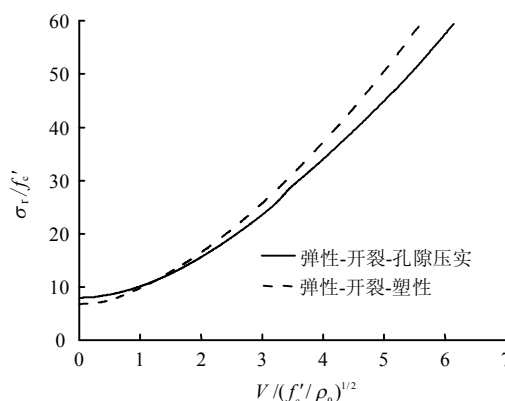


图 5 弹性-开裂-孔隙压实模型与弹性-开裂-塑性模型的计算结果

Fig.5 Calculation results of elastic-cracked-compacted model and elastic-cracked-plastic model

由图 3 可知,响应区域界面速度随着空腔膨胀速度的增大而增大。在开裂区没有消失的情况下,开裂区内侧界面速度 C_2 的增加速率大于其外侧界面速度 C_1 的增加速率,空腔膨胀速度 $V/(f'_c/\rho_0)^{1/2} \approx 3$ 时开裂区消失;开裂区消失后,随着空腔膨胀速度 V 的增大, C_2 逐渐趋于一定值。

由图 4 可知:空腔表面的径向应力随其膨胀速度的增大而增大,膨胀速度 $V/(f'_c/\rho_0)^{1/2} < 3$ 时,弹性-开裂-孔隙压实响应空腔表面的径向应力小于弹性-孔隙压实响应空腔表面的径向应力,在空腔膨胀速度 $V/(f'_c/\rho_0)^{1/2} > 3$ 时,二者相等。由图 5 可知,空腔膨胀速度 $V/(f'_c/\rho_0)^{1/2} < 1.4$ 时,弹性-开裂-孔隙压实模型的空腔表面径向应力大于弹性-开裂-塑性模型的空腔表面径向压力,但差别不大;当 $V/(f'_c/\rho_0)^{1/2} > 1.4$ 时,弹性-开裂-孔隙压实模型的空腔表面径向应力小于弹性-开裂-塑性模型的空腔表面径向压力,并且随着空腔膨胀速度的增大,二者之间的差别越来越大,这也是弹性-开裂-塑性球形空腔膨胀侵彻模型不能很好预测较高着靶速度下侵彻深度的原因所在。为了建立弹体侵彻方程需对空腔膨胀压力与膨胀速度之间的关系按照式(14)进行拟合。拟合结果见表 2。

$$\frac{\sigma_r}{f'_c} = A + B \left[\frac{V}{(f'_c/\rho_0)^{1/2}} \right] + C \left[\frac{V}{(f'_c/\rho_0)^{1/2}} \right]^2 \quad (14)$$

表2 空腔膨胀压力与空腔膨胀速度的曲线拟合系数
Table 2 Curve-fitting parameters of cavity expansion pressure vs cavity expansion velocity

响应类型	A	B	C
弹性-孔隙压实	9.20	3.07	0.81
弹性-开裂-孔隙压实	7.95	3.48	0.78

取钢制卵形弹头弹体参数: 质量 $m = 1.6$ kg, 弹体直径 $2a = 30.5$ mm, 头部形状系数 $\psi = 3.0$, 混凝土的单轴抗压强度 $f'_c = 51$ MPa。将拟合参数 A 、 B 、 C 代入文献[7]的刚性弹体侵彻深度预测方程, 计算着靶速度在 450~1 200 m/s 之间混凝土靶的侵彻深度, 并与文献[7, 13]试验结果的计算结果对比, 结果如图 6 所示。

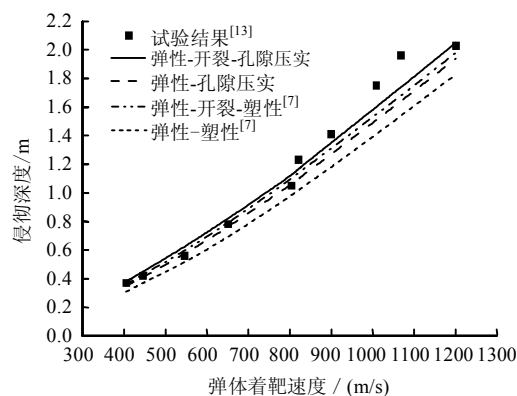


图6 侵彻深度与模型结果对比

Fig.6 Depth of penetration data and model predictions

由图 6 可知, 弹性-开裂-孔隙压实侵彻深度预测模型的预测结果和试验结果的一致性很好, 特别是着靶速度较高时 (大于 800 m/s) 的试验数据比较吻合, 而弹性-开裂-塑性和弹性-孔隙压实模型的预测精度次之, 弹塑性模型最差。

6 结 语

采用两段线性状态方程和考虑拉伸破坏的 Mohr-Coulomb 屈服准则描述混凝土材料, 建立了常规弹速条件下混凝土材料的动态球形空腔膨胀理论。研究表明, 运用弹性-开裂-孔隙压实球形空腔膨胀理论建立的刚性侵彻深度预测方程, 其计算结果与试验结果具有良好的一致性, 能较好地预测较高着靶速度下的侵彻深度, 从而改进和提高了刚性弹体侵彻混凝土靶侵彻深度的预测精度。

参 考 文 献

[1] 陈士林, 王德荣, 谭可可. 射弹在岩石介质中的侵彻实用计算方法[J]. 岩土力学, 2007, 28(6): 1103—1107.
CHEN Shi-lin, WANG De-rong, TAN Ke-ke. Applied calculation method for penetration of projectile into

rock[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2007, 28(6): 1103—1107.

[2] BISHOP R F, HILL R F, MOTT N F. The theory of indentation and hardness[J]. *Proceedings of the Physical Society*, 1945, 57: 147—159.

[3] GOODIER J N. On the mechanics of indentation and cratering in the solid targets of strain-hardening metal by impact of hard and soft spheres[C]//*Proceedings of the 7th Symposium on Hypervelocity Impact*, New York: AIAA, 1965: 215—259.

[4] FORRESTAL M J, LUK V K, ROSENBERG Z, et al. Penetration of 7075-T651 aluminum targets with ogival-nose rods[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 1992, 29: 1729—1736.

[5] FORRESTAL M J, TZOU D Y, ASKARI E, et al. Penetration into ductile metal targets with rigid spherical-nose rods[J]. *International Journal of Impact Engineering*, 1995, 16: 699—710.

[6] FORRESTAL M J. Penetration into dry porous rock[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 1986, 22: 1485—1500.

[7] FORRESTAL M J, TZOU D Y. A spherical cavity expansion penetration model for concrete targets[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 1997, 34: 4127—4146.

[8] STAPATHY S. Dynamic spherical cavity expansion in brittle ceramics[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2001, 38: 5833—5845.

[9] 王明洋, 郑大亮, 钱七虎. 弹体对混凝土介质侵彻、贯穿的比例换算关系[J]. *爆炸与冲击*, 2004, 24(2): 108—114.
WANG Ming-yang, ZHEN Da-liang, QIAN Qi-hu. The scaling problems of penetration and perforation for projectile into concrete media[J]. *Explosion and Shock Waves*, 2004, 24(2): 108—114.

[10] LUK V K, FORRESTAL M J. Penetration into semi-infinite reinforced concrete targets with spherical and ogival nose projectiles[J]. *International Journal of Impact Engineering*, 1987, 6: 291—301.

[11] 陈惠发, A.F. 萨李普. 混凝土和土的本构方程(英文版)[M]. 余天庆, 王勋文, 刘西拉译. 北京: 中国建筑工业出版社, 2005.

[12] HOLMQUIST T J, JOHNSON G R, COOK W H. A computational constitutive model for concrete subjected to large strains, high strain rate, and high pressures[C]//*14th International Symposium on Ballistics*. Quebec City, Canada: [s. n.], 1993: 591—600.

[13] FORRESTAL M J, FREW D J, HANCHAK S J, et al. Penetration of grout and concrete targets with ogive-nose steel projectiles[J]. *International Journal of Impact Engineering*, 1996, 18: 465—476.

[14] HALL C A, CHHABILDAS L C, REINHART W D. Shock hughoniot and release in concrete with different aggregate sizes from 3 to 23 GPa[J]. *International Journal of Impact Engineering*, 1999, 23: 341—351.

[15] CHHABILDAS L C, GRADY D E, HALL C A, et al. Dynamic properties of concrete through particle velocity profile measurements, SAND2002-1577[R]. Albuquerque, NM187185-1181: Sandia National Laboratories, 2002: 12—13.